Roll No. : ....

Total No. of Questions : **11**] [Total No. of Printed Pages : **7**

ED–2083 (A)

B.Sc. B.Ed. (IInd Year) Examination, 2022

MATHEMATICS

Paper – II (CC–5)

(Real Analysis)

Time : 3 Hours] [*Maximum Marks : 50*

Section–A **(Marks : 1½ × 8 = 12)**

Note :– Answer all *eight* questions (Answer limit **50** words). Each question carries **1½** marks.

(खण्ड–अ) **(अंक : 1½ × 8 = 12)**

नोट :– सभी **आठ** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **50** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **1½** अंक का है।

Section–B **(Marks : 4 × 5 = 20)**

Note :– Answer all *five* questions. Each question has internal choice (Answer limit **200** words). Each question carries **4** marks.

(खण्ड–ब) **(अंक : 4 × 5 = 20)**

नोट :– सभी **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में विकल्प का चयन कीजिए (उत्तर-सीमा **200** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **4** अंक का है।

Section–C **(Marks : 6 × 3 = 18)**

Note :– Answer any *three* questions out of five (Answer limit **500** words). Each question carries **6** marks.

(खण्ड–स) **(अंक : 6 × 3 = 18)**

नोट :– पाँच में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए (उत्तर-सीमा **500** शब्द)। प्रत्येक प्रश्न **6** अंक का है।

Section–A

(खण्ड–अ)

1. (i) Define rational and irrational number.

परिमेय व अपरिमेय संख्या को परिभाषित कीजिए।

(ii) Write the denseness property of real number.

वास्तविक संख्या के सघनता गुणधर्म को लिखिए।

(iii) Define chain rule of differentiability.

अवकलनीयता के लिए श्रृंखला नियम को समझाइए।

(iv) Write the statement of Darboux's theorem.

डार्बू प्रमेय का कथन लिखिए।

(v) Define Riemann integral.

रीमान समाकलन को समझाइए।

(vi) Define Leibnitz theorem.

लेबनीज प्रमेय को समझाइए।

(vii) Define Abel's Test.

आबेल के परीक्षण को समझाइए।

(viii) Define Cauchy's sequences.

कॉशी अनुक्रम को समझाइए।

Section–B

(खण्ड–ब)

2. Prove that $\sqrt{2}$ is an irrational number.

सिद्ध कीजिए $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

Or

(अथवा)

Prove that every complete ordered field F is an Archimedean ordered field.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक पूर्ण क्रमित क्षेत्र F आर्किमिडीय क्षेत्र होता है।

3. A function f is continuous in [0, 1] and derivable in (0, 1), prove that :

$$f'(x) = f(1) - f(0), \ \forall \ x \in (0, 1)$$

एक फलन f, [0, 1] में सतत तथा (0, 1) में अवकलनीय है, तो सिद्ध कीजिए :

$$f'(x) = f(1) - f(0), \ \forall \ x \in (0, 1)$$

Or

(अथवा)

If the derivatives of two functions at every point of the integral (a, b) is same, then the function difference be a constant.

यदि विवृत अन्तराल (a, b) के प्रत्येक बिन्दु पर दो फलनों के अवकलज समान हों तो उनका अन्तर अचर होता है।

4. If $f(x) = x, x \in [0, 1]$, then show that f is R-integrable on [0, 1] and that :

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

यदि $f(x) = x, x \in [0, 1]$, तो सिद्ध कीजिए कि अन्तराल [0, 1] पर R-समाकलनीय है :

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

Or

(अथवा)

Let f be a function on [0, 1] defined by :

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{if} \quad x \neq 1/2 \\ 0\,, & \text{if} \quad x = 1/2 \end{cases}$$

then show that $f \in$ R [0, 1] and evaluate :

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

यदि f अन्तराल [0, 1] के लिए निम्न तरह से परिभाषित हो :

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{यदि} \quad x \neq 1/2 \\ 0\,, & \text{यदि} \quad x = 1/2 \end{cases}$$

तो दिखाइए कि $f \in$ R [0, 1] तथा $\int_0^1 f(x)\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. If :

$$f(x) = \frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1},\ x \neq 0$$

then prove that the $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ does not exist.

यदि :

$$f(x) = \frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1},\ x \neq 0$$

तो सिद्ध कीजिए कि $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ विद्यमान नहीं है।

Or

(अथवा)

Define comparison test and Cauchy's integral test.

तुलनात्मक (comparison) परीक्षण तथा कॉशी समाकलन परीक्षण को समझाइए।

6. Prove that $f(x) = \dfrac{1}{x}$ is uniformly continuous in (a, ∞) for $(a > 0)$.

   सिद्ध कीजिए कि $f(x) = \dfrac{1}{x}$ अन्तराल (a, ∞) $(a, 0)$ में एकसमान संतत है।

Or

(अथवा)

Discuss the uniform convergence of the series in the interval [0, 1] :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n (1 - x)$$

[0, 1] अन्तराल में निम्न श्रेणी के एकसमान अभिसारी का विवेचन कीजिए :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n (1 - x)$$

Section–C

(खण्ड–स)

7. Prove that if x and y are any two positive real numbers, then $\exists\ n \in \mathrm{N}$ s.t $nx > y$.

   सिद्ध कीजिए यदि x और y दो धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हों तो प्राकृत संख्या n विद्यमान होता है कि $nx > y$.

8. State and prove Darboux theorem.

   डार्बू प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

9. Let f is a function defined on the interval [0, 1] :

$$f(x)=\begin{Bmatrix} 0\ , & \text{if} & x & \text{is rational} \\ 1\ , & \text{if} & x & \text{is irrational} \end{Bmatrix}.$$

Then show that f is not R-integrable on [0, 1].

यदि फलन f अन्तराल [0, 1] पर निम्न रूप में परिभाषित है :

$$f(x)=\begin{Bmatrix} 0\ , & \text{यदि} & x & \text{परिमेय है} \\ 1\ , & \text{यदि} & x & \text{अपरिमेय है} \end{Bmatrix}$$

तो सिद्ध कीजिए कि f सवृंत अन्तराल [0, 1] पर रीमान समाकलनीय नहीं है।

10. Prove that the series is divergent :

$$\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी अपसारी है :

$$\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

11. Test the convergence of the following integrals :

(i) $\int_{-\infty}^{0} e^x\, dx$

(ii) $\int_{-\infty}^{0} \sinh x\, dx$

निम्नलिखित समाकलनों के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

(i) $\int_{-\infty}^{0} e^{x}\, dx$

(ii) $\int_{-\infty}^{0} \sinh x \; dx$